凸錐の露出性について

武流野　フィゲラ　浪蓮草 (統計数理研究所)
Vera Roshchina (ニューサウスウェールズ大学)
James Saunderson (モナシュ大学)

2020 年 8 月 25 日

背景

- $\mathcal{K}$: 閉凸錐
- $\mathcal{L}$: 部分空間，a:ベクトル

$(\mathcal{L}+a)\cap\mathcal{K}\neq\emptyset$ とする．

基本的な問題

$\operatorname{dist}(x,\mathcal{L}+a)$ と $\operatorname{dist}(x,\mathcal{K})$ を用いて，$\operatorname{dist}(x,(\mathcal{L}+a)\cap\mathcal{K})$ を評価するのは可能でしょうか．

- $\mathcal{K}$ は多面錐のとき $\Rightarrow$ Hoffman's Lemma
- $\mathcal{K}$ は半正定値錐 $\mathcal{S}^n_+$ のとき $\Rightarrow$ Sturm's error bound

J. F. Sturm.
Error bounds for linear matrix inequalities.
SIAM Journal on Optimization, 10(4):1228–1248, Jan. 2000.

A. J. Hoffman.
On approximate solutions of systems of linear inequalities.
Journal of Research of the National Bureau of Standards, 49(4), 1957.

背景

基本的な問題

$\operatorname{dist}(x, \mathcal{L} + a)$ と $\operatorname{dist}(x, \mathcal{K})$ を用いて，$\operatorname{dist}(x, (\mathcal{L} + a) \cap \mathcal{K})$ を評価するのは可能でしょうか.

一般の $\mathcal{K}$ のとき，以下があれば，エラーバウンドが得られる：

- $\mathcal{K}$ が**恭順錐** (amenable cone) である
- $\mathcal{K}$ の**面残差関数** (facial residual function)
- **面縮小法** (facial reduction)

武流野
Amenable cones: error bounds without constraint qualifications.
https://arxiv.org/abs/1712.06221.
To appear in Mathematical Programming

今日の課題

恭順錐のクラスを調べることであり，他の露出生の概念との比較を行うことである.

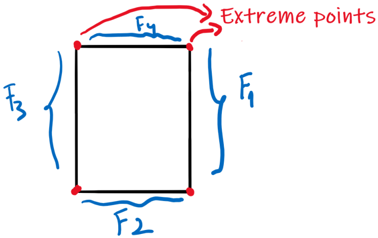
面の復習

- C: 閉凸集合
- $F \subseteq C$: 閉凸集合

Definition (凸集合の面)

F は C の面 $\Leftrightarrow$ if $\alpha x + (1-\alpha)y \in F$, with $x, y \in C$, $\alpha \in (0,1)$, then $x, y \in F$.

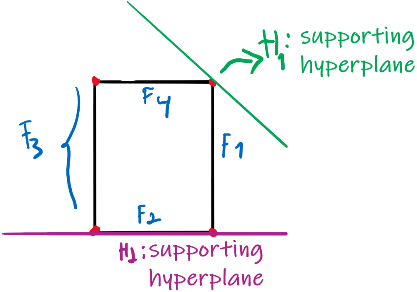
$F \trianglelefteq C$ を書く.

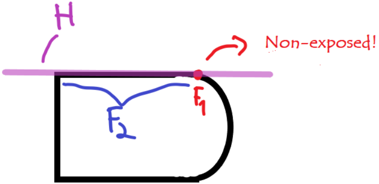


露出面

Definition (露出面 (Exposed face))

$F \trianglelefteq C$ が**露出面** $\Leftrightarrow$ $F = C \cap H$ を満たす C の支持超平面 H が存在する.





恭順錐 (Amenable cones)

$$\mathrm{dist}\,(x, S) := \min\{\|y - x\| \mid y \in S\}$$

Definition (Amenable cones)

$\mathcal{K}$ は**恭順 (amenable)** $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ が $\mathcal{K}$ の面のとき，ある $\kappa > 0$ に対して

$$\mathrm{dist}\,(x, \mathcal{F}) \leq \kappa \mathrm{dist}\,(x, \mathcal{K}), \qquad \forall x \in \mathrm{span}\,\mathcal{F}.$$

(リマインダー：$\mathcal{F} = \mathcal{K} \cap \mathrm{span}\,\mathcal{F}$ 常に成り立つ．)

例：

- 対称錐（例：半正定値錐，２次錐）
- 多面錐
- 狭義凸錐　（例：p 次錐, ただし $p \in (1, \infty)$)
- $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ が恭順のとき，$\Rightarrow$ $\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$ が恭順である．

恭順凸集合 (Amenable convex sets)

C:閉凸集合

Definition (恭順面)

$F \trianglelefteq C$ が**恭順面** $\Leftrightarrow$ すべての有界集合 B に対して， 以下を満たす $\kappa > 0$ が存在する：

$$\operatorname{dist}(x, F) \leq \kappa \operatorname{dist}(x, C), \qquad \forall x \in B \cap \operatorname{aff} F.$$

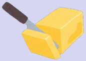
C が**恭順凸集合** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ すべての面 $F \trianglelefteq C$ が恭順面である.

Proposition (L., Roshchina, Saunderson)

C_1, C_2: 恭順凸集合とする.

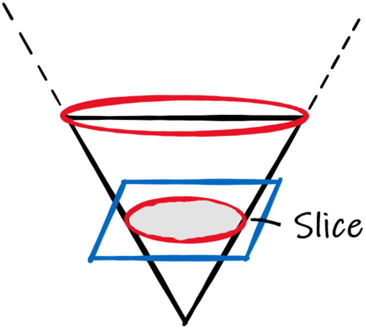
1. $C_1 \cap C_2$ は恭順である.
2. $C_1 \times C_2$ は恭順である.

恭順錐のスライス



Theorem (L., Roshchina, Saunderson)

1. $\mathcal{K}$ が恭順錐 $\Rightarrow$ すべてのスライスが恭順凸集合になる.
2. C:恭順凸集合ならば, $\mathcal{K} = \mathrm{cone}(\{1\} \times C)$ が恭順錐である.



新たの恭順集合

- Doubly nonnegative cone: $\mathcal{S}^n_+ \cap \mathcal{N}_n$
- Spectrahedral set:

$$C = \{y \in \mathbb{R}^m \mid A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i y_i \succeq 0\}$$

- 等質錐 (Homogeneous cone): $\mathcal{S}^n_+$ のスライスだから.

C. B. Chua.
Relating homogeneous cones and positive definite cones via T-algebras.
SIAM Journal on Optimization, 14(2):500–506, 2003.

L. Faybusovich.
On Nesterov's approach to semi-infinite programming.
Acta Applicandae Mathematica, 74(2):195–215, Nov 2002.

凸集錐の露出生について

$$\mathcal{F} \text{ is a face of } \mathcal{K} \overset{\text{def}}{\iff} \mathcal{F} \trianglelefteq \mathcal{K}$$

$$\mathcal{K}^* := \{y \mid \langle y, x\rangle \geq 0, \forall x \in \mathcal{K}\}$$

1. Projectionally exposed cone $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall \mathcal{F} \trianglelefteq \mathcal{K}$ there exists a projection such that $P\mathcal{K} = \mathcal{F}$.
2. Amenable cones $\overset{\text{def}}{\iff}$ for every face $\mathcal{F}$ of $\mathcal{K}$ there is $\kappa > 0$ such that

$$\operatorname{dist}(x, \mathcal{F}) \leq \kappa \operatorname{dist}(x, \mathcal{K}), \qquad \forall x \in \operatorname{span} \mathcal{F}.$$

3. Nice cone $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall \mathcal{F} \trianglelefteq \mathcal{K}, \quad \mathcal{F}^* = \mathcal{K}^* + \mathcal{F}^\perp$.
4. Facially exposed cone $\overset{\text{def}}{\iff}$ every face is facially exposed.

Proposition

$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$. *If* $\dim \mathcal{K} \leq 3$, $4 \Rightarrow 1$.

反例について

1. Facially exposed $\Leftarrow$ Nice $\Leftarrow$ Amenable $\Leftarrow$ Projectionally exposed.
2. $\dim \mathcal{K} \leq 3$ のとき，Facially exposed $\Rightarrow$ Projectionally exposed
3. Pataki の予想 ('13): Facially exposed $\Rightarrow$ Nice[1].
4. Roshchina('14): 露出錐であり nice ではない 4 次元錐が存在する [2]
5. Nice $\Leftarrow$ Amenable が成り立つが，逆の方は？

[1] *On the connection of facially exposed and nice cones*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013

[2] *Facially exposed cones are not always nice*, SIOPT, 2014

残念

Theorem (L., Roshchina, Saunderson)

nice であり，恭順ではない 4 次元の錐が存在する．

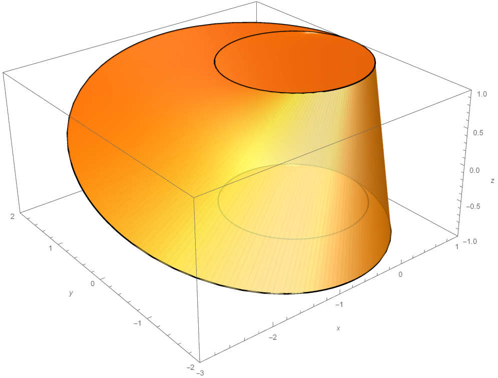


Figure: 恭順ではない錐のスライス

露出生のまとめ

1. Facially exposed $\Leftarrow$ Nice $\Leftarrow$ Amenable $\Leftarrow$ Projectionally exposed.
2. $\dim \mathcal{K} \leq 3$ のとき，Facially exposed $\Rightarrow$ Projectionally exposed
3. $\dim \mathcal{K} \geq 4$ のとき，Facially exposed $\not\Rightarrow$ Nice. Nice $\not\Rightarrow$ Amenable.
4. Amenable $\Rightarrow$ Projectionally exposed については？

Theorem (L., Roshchina, Saunderson)

$\dim \mathcal{K} \leq 4$ のとき，*Amenable* $\Leftrightarrow$ *Projectionally exposed*

ということは反例があれば，$\dim \mathcal{K} \geq 5$.

今後の課題

- 恭順であり Projectionally Exposed ではない 5 次元の錐を見つけること.
- 恭順錐のクラスを広げること.

L., Vera Roshchina and James Saunderson
Amenable cones are particularly nice
In Preparation